Research, Society and Development, v. 9, n. 6, e162963629, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i6.3629

As contribuições do uso de tarefas para o processo de formação de professores

The contributions of the use of tasks for the teacher training process

Las contribuciones del uso de tareas para el proceso de formación de profesores

Recebido: 14/04/2020 | Revisado: 16/04/2020 | Aceito: 17/04/2020 | Publicado: 21/04/2020

Fábio Garcia Bernardo
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3785-4184
Instituto Benjamin Constant, Brasil
E-mail: prof_fabiobernardo@yahoo.com.br
Jéssica Oliveira de Luna
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8091-9209
Prefeitura Municipal de Duque de Caxias, Brasil
E-mail: jessicamluna@gmail.com

Resumo

Neste trabalho, temos por objetivo discutir as contribuições da utilização de tarefas para abordar os aspectos importantes e inerentes ao conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento de conteúdo no horizonte em uma turma de licenciandos em matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Apresentamos uma tarefa, com duas soluções hipotéticas de alunos da educação básica e, em seguida, propomos quatro questionamentos aos licenciandos, onde estes deveriam respondê-los por escrito e, em seguida, defender suas ideias para os demais alunos da turma. Ao discutir as soluções e as respostas dos licenciandos, provocamos uma série de debates e discussões que os fizeram refletir sobre a importância de se debater os aspectos pedagógicos e específicos da atuação do professor em sala de aula. O desempenho dos alunos enfatiza a importância e a necessidade de se discutir tais questões ao longo de todo o curso de licenciatura, desde o primeiro semestre do curso.

Palavras-chave: Utilização de tarefas; Conhecimento especializado do conteúdo; Conhecimento pedagógico do conteúdo; Conhecimento de conteúdo no horizonte.

Abstract

In this work, we aim to discuss the contributions of the use of tasks to address the important and inherent aspects of the specialized content knowledge, pedagogical content knowledge and horizon content knowledge with a group of mathematic´s students in the Federal University of Rio de Janeiro. We present a task with two hypothetical solutions of basic education students, and then we propose four questions to the graduating, where they should write them in a paper and after that defend their ideas for the other students in the class. In discussing the solutions and the answers of the students, we teased a series of debates and discussions that made them reflect on the importance of discussing the pedagogical and specific aspects of the teacher's performance in the classroom. The students' performance emphasizes the importance and the need to discuss such issues throughout the undergraduate course, since the first semester of the course.

Keywords: Using tasks; Specialized content knowledge; Pedagogical content knowledge; Horizon content knowledge.

Resumen

En este documento, nuestro objetivo es discutir las contribuciones del uso de tareas para abordar los aspectos importantes e inherentes del conocimiento de contenido especializado, el conocimiento de contenido pedagógico y el conocimiento de contenido en el horizonte en una clase de estudiantes de pregrado de matemáticas en la Universidad Federal de Río de Janeiro. Enero Presentamos una tarea, con dos soluciones hipotéticas de estudiantes de educación básica, y luego proponemos cuatro preguntas a estudiantes de pregrado, donde deben responderlas por escrito y luego defender sus ideas ante los otros estudiantes de la clase. Cuando discutimos las soluciones y respuestas de los graduados, provocamos una serie de debates y discusiones que los hicieron reflexionar sobre la importancia de debatir los aspectos pedagógicos y específicos del desempeño del maestro en el aula. El desempeño de los estudiantes enfatiza la importancia y la necesidad de discutir estos temas a lo largo del curso, desde el primer semestre del curso.

Palabras clave: Uso de tareas; Conocimiento de contenido especializado; Conocimiento pedagógico del contenido; Conocimento de contenido en el Horizonte.

1. Introdução

Este trabalho tem como objetivo discutir as contribuições da utilização de tarefas (Biza, Nardi & Zachariade, 2007) para fomentar discussões, em uma turma de licenciandos em matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, acerca da importância do conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento de conteúdo no horizonte (Shulman 1987, Ball, Thames & Phelps, 2008, Ball & Bass, 2009; Fernandez & Figueiras, 2014) para o trabalho do professor em sala de aula.

Os dados que discutiremos são oriundos de uma atividade (tarefa) que se refere à modelagem de um problema, que se dá por meio de uma função exponencial, retirado da coleção do professor de Matemática da Sociedade Brasileira de educação matemática (Lima et al, 2001). De acordo com os autores, é comum a solução equivocada do problema ser apresentada por meio do uso da função afim como modelo matemático.

De acordo com Biza, Nardi & Zachariades (2007) a análise de questões resolvidas contribui para a formação do professor reflexivo e crítico, trazendo à tona a consciência do professor com base no conhecimento atribuído. A ideia central da utilização de tarefas visa discernir, diferenciar e discutir a gama de influências (epistemológicas, pedagógicas, curriculares, profissionais e pessoais) sobre os argumentos que os professores apresentam quando elaboram as decisões que tomam no decorrer de uma aula de matemática. Os autores defendem a ideia de que as decisões tomadas pelos professores em sala de aula não possuem exclusivamente fundamento epistemológico, ou seja, sua base é mais ampla e inclui uma variedade de outras influências, notadamente de caráter pedagógico, curricular, profissional e de natureza pessoal. Ao apresentarmos uma tarefa em uma turma de licenciatura, buscamos fomentar uma discussão acerca dessas influências que permeiam o trabalho do professor, bem como discutir a necessidade e a importância de se refletir sobre os diferentes aspectos e conhecimentos que o professor deve desenvolver para estar melhor preparado para as iminentes situações e discussões da sala de aula, de forma a contribuir para o efetivo aprendizado de seus alunos

Nesse trabalho, seguimos a mesma estrutura das tarefas utilizadas por Biza, Nardi & Zachariades (2007) que se caracteriza em solicitar aos licenciandos, professores e futuros professores que reflitam sobre os objetivos de aprendizagem dentro de um problema matemático (e resolvê-lo); interpretar as falhas na solução fictícia de estudantes do ensino básico; e produzir, por escrito, um feedback para os alunos sobre suas respostas. De forma geral, nosso objetivo é utilizar as tarefas de forma a contribuir para que os futuros professores desenvolvam a sua capacidade de transformar o conhecimento teórico na prática orientada para a sala de aula. Essa transformação tem sido descrita e categorizada pela literatura como uma gama de conhecimentos necessários para o ensino (Shulman 1987; Ball, Thames & Phelps, 2008), onde, dentre eles, figuram o conhecimento de conteúdo no horizonte (HCK) que iremos abordar nesse trabalho.

2. Metodologia

A pesquisa, de natureza qualitativa, teve como princípio colocar os alunos de um curso de licenciatura, futuro professores, como agentes principais de seus processos de ensino e aprendizagem. Dividimos a turma em duplas, disponibilizamos uma tarefa (apresentada mais adiante), com supostas soluções de alunos do ensino básico e solicitamos que discutissem essas respostas entre si. Em seguida, solicitamos que os licenciandos produzissem textos formais, usando uma linguagem apropriada, como se fossem professores, para as respostas fictícias à tarefa. Além de entregar os comentários por escrito, solicitamos que fossem até o quadro explanar seus argumentos (pedagógicos e matemáticos) para defender seus pontos de vista.

A tarefa foi realizada durante quatro tempos de aula, aplicada em uma turma do quinto período do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), com sete alunos, na disciplina Fundamentos da Matemática III. A turma era composta de alunos que já atuavam como professores/monitores em cursinhos preparatórios e por alunos sem nenhuma experiência no magistério.

Biza, Nardi e Zachariades (2007) sugerem o uso de tarefas nos cursos de licenciatura em matemática como uma estratégia metodológica que tem por objetivo colocar o aluno em uma posição crítica em relação à discussão de temas fundamentais para a sala de aula.

Além disso, as tarefas se propõem a tirar o aluno (futuro professor) de sua "zona de conforto", uma vez que sugere discussões em pequenos grupos e discussões coletivas proporcionando que outras/novas reflexões e aprofundamentos possam emergir desses momentos.

De acordo com as autoras (*ibiden*), a ideia central da utilização de tarefas visa discernir, diferenciar e discutir a gama de influências (epistemológicas, pedagógicas, curriculares, profissionais e pessoais) sobre os argumentos que os professores apresentam quando elaboram as decisões que tomam no decorrer de uma aula de matemática.

Essa estratégia metodológica, que procura dar protagonismo aos alunos, é definida por

Pereira et al. (2018) como uma forma de trabalho que envolve uma mudança de paradigma da escola tradicional para a escola contemporânea e pode ser definida como uma metodologia ativa de investigação.

As metodologias ativas procuram respeitar as individualidades dos alunos, buscam valorizar as opiniões dos estudantes, incentivando-os a realizar questionamentos e buscar respostas por meio da pesquisa de modo autônomo, em detrimento às abordagens tradicionais que colocavam o professor como centro das atenções na sala de aula e o aluno como mero receptor de informações.

3. Referenciais Teóricos

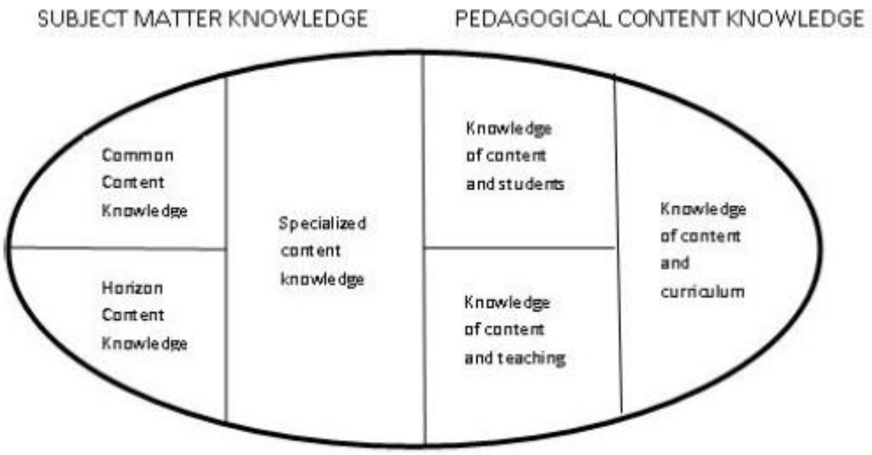
Ball & Bass (2009), descrevem o HCK como "um tipo de visão periférica da matemática necessária ao ensino, uma visão panorâmica para além do que o ensino exige" (p.1). Para melhor contextualizar essas ideias, vamos retomar brevemente o trabalho de Ball, Thames & Phelps (2008) que apresenta duas categorias importantes para o conhecimento matemático para o ensino denominado por MKT (Mathematics Knowledge for teaching): o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo. De acordo com os autores, estes não são independentes um do outro, mas é uma combinação deles que define o conhecimento necessário para o ensino de matemática. O conhecimento pedagógico do conteúdo refere-se "as formas especiais nas quais o ensino exige uma integração simultânea de idéias-chave no conteúdo com as formas pelas quais os alunos os apreendem" (*Ibidem*, p.393), enquanto que o conhecimento do conteúdo diz respeito ao conhecimento da própria matemática.

Cada um deles também é subdividido em domínios mais específicos e os autores observam que um dos subdomínios incluídos nesta estrutura, o Horizon Content Knowledge (HCK), surge como particularmente relevante, pois diz respeito à visão longitudinal da matemática que os professores precisam ter para o trabalho em sala de aula.

Na abordagem sugerida por Ball et al (2008), o HCK refere-se ao conhecimento geral dos professores acerca dos conteúdos anteriores e os seguintes a serem trabalhados com os alunos. Essa perspectiva lembra bastante as dimensões do conhecimento curricular proposto por Schulman (1986) denominado por este como conhecimento vertical do currículo, que se refere à familiaridade com os tópicos e questões durante os anos anteriores e posteriores (Shulman, 1986). A seguir, na Figura 1, o quadro teórico desenvolvido por Ball et all (2008) para melhor compreendermos essas categorias:

Research, Society and Development, v. 9, n. 6, e162963629, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i6.3629

Figura 1: Categorias do conhecimento matemático para o ensino.



Fonte: Ball, Thames e Phelps, 2008, p.403

Para ampliar essas concepções, é necessário uma visão geral dos conhecimentos dos alunos, além daquela consciência sobre o que já foi discutido em outros anos e o que ainda estar por vir, pois esta está relacionada com a ideia de continuidade no ensino de matemática. Essa perspectiva longitudinal da matemática é uma das principais características que o professor deve ter e o que melhor caracteriza a visão do HCK para os autores. Pode parecer simples, mas o HCK abrange uma combinação complexa de conhecimento, habilidades e experiência pedagógica e de matemática que deve ser esclarecida para abordar com sucesso questões de transição e continuidade em matemática.

Na próxima seção, vamos apresentar a tarefa proposta aos alunos, as respectivas respostas e as nossas análises e discussões que buscamos promover para discutir as ideias do HCK, objetivo de nossa abordagem. O problema/tarefa foi retirado do livro "Temas e Problemas" (Lima et al, 2001) – Coleção do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática e foi escolhido por apresentar uma situação problema que necessita ser analisada com bastante cuidado e que exige diferentes tipos de conhecimentos por parte do professor, para que possa ser utilizada de forma exitosa em sala de aula. Os autores *(ibiden)* argumentam que é comum a primeira resposta a ser dada pelos alunos tender a simplificar o problema e caracterizá-lo, de forma intuitiva, como um problema de função afim. No entanto, após uma discussão mais aprofundada das condições iniciais e da situação proposta, os autores demonstram a melhor adequação da função exponencial para a modelagem do problema.

Para demonstrar que se trata de uma situação modelada por uma função exponencial, utilizamos argumentos pedagógicos, argumentos empíricos e de um conhecimento

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i6.3629

especializado de matemática, recorrendo, inclusive, ao resultado de um teorema sobre funções monótonas e injetivas, somente discutido em um curso de nível superior. Dessa forma, justificamos a escolha desse problema, uma vez que este parecia ser capaz de formentar dicussões, dúvidas e questionamentos por parte dos licenciandos que seriam fundamentais para discutirmos a importância de se refletir sobre o processo de transformação do conhecimento teórico em conhecimento prático para a sala de aula.

4. A Tarefa e os Seus Desdobramentos

Uma piscina tem capacidade para 100 m^3 de água. Quando a piscina está completamente cheia, é colocado 1 kg de cloro na piscina. Água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado através de um ladrão. Depois de 1 hora, um teste revela que ainda restam 900 g de cloro na piscina.

a) Que quantidade de cloro restará na piscina 10 horas após sua colocação?

b) Esboce o gráfico da função que você usou para descrever o problema.

Resposta do Estudante 1

a) O problema representa uma função afim e a quantidade de cloro vai diminuindo com o passar das horas. De acordo com o enunciado, podemos localizar os seguintes pontos: No início: 1000g de cloro; após 1 hora: 900g de cloro. Logo, podemos encontrar a função f(x) = ax + b, da seguinte forma:

$$\begin{cases} 1000 = 0.a + b \\ 900 = 1.a + b \end{cases} \Rightarrow b = 1000 \ e \ a = -100$$

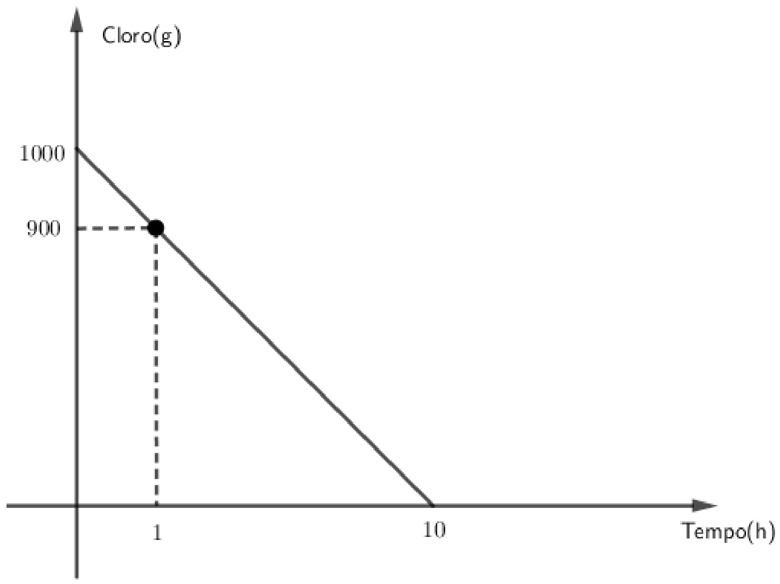
f(x) = - 100x + 10000

calculando f(10) = -100.10 + 1000 = 0

Resposta: Após 10 horas, não há mais cloro na piscina!

b) Gráfico

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i6.3629



Resposta do Estudante 2

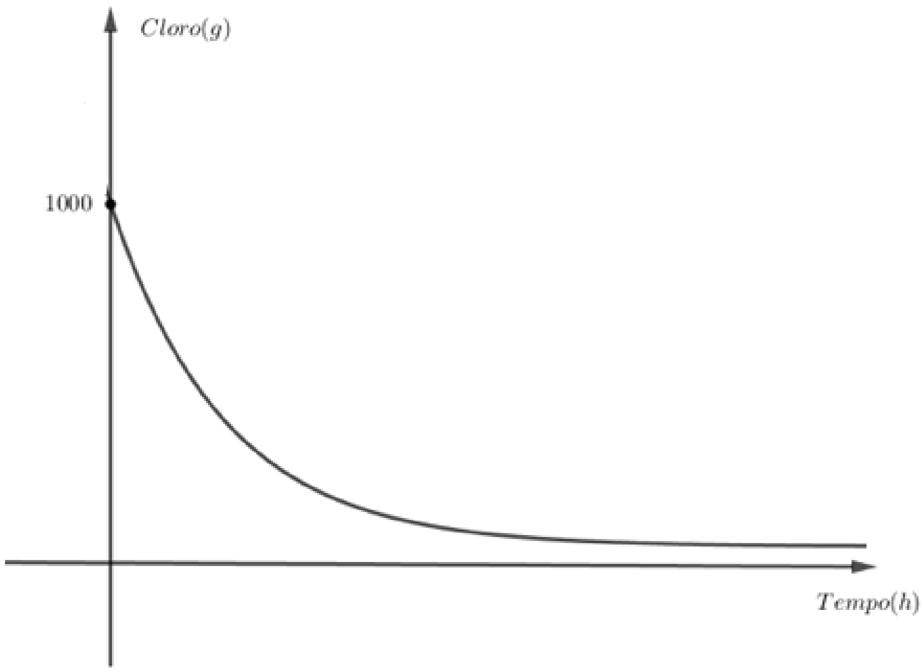
a) O decrescimento se dá de forma exponencial e a função é:

$f(t) = 1000.(0.9)^t$

Então, $f(10) = 1000.(0.9)^{10} \Rightarrow f(10) \approx 349$ *g.*

Resposta: Após 10 horas, haverá aproximadamente, 349g de cloro.

b) Gráfico



(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i6.3629

Questionamentos propostos aos licenciandos:

a) Em seu ponto de vista qual era o objetivo do professor ao trabalhar esse problema?
b) Indique a solução que você julga correta e justifique sua escolha. Caso não concorde com nenhuma das duas, aponte a solução correta.
c) Estando na posição de professor, como você justificaria para a turma e/ou aluno que a solução dele(s) não está correta?
d) Em sua opinião, qual(is) o(s) conhecimento(s) necessário(s) ao professor de matemática para responder as perguntas anteriores?

Dividimos a turma em duas duplas e um trio, solicitamos que lêssem o problema e que respondessem aos questionamentos, primeiro por escrito e depois, um dos integrantes das duplas e do trio, apresentariam para os demais as soluções discutidas e encontradas. Os alunos tiveram cerca de quarenta minutos para discutir, responder e entregar as respostas aos questionamentos para que assim pudéssemos compartilhar, apresentar e discutir os resultados.

Nesse período inicial, diversos questionamentos nos foram apresentados e os licenciandos se sentiram bastante incomodados com a situação proposta no enunciado, argumentando, inicialmene, que os dados não eram suficientes para responder ao problema.

Procuramos instruí-los a estarem na posição de professores e mantivemos a postura de apenas acompanhar as discussões sem promover interferências nas interpretações e questionamentos que estavam fazendo. Adicionalmente à atividade impressa entregue, dissemos que as respostas dos alunos eram fictícias e elaboradas por nós, autores desse trabalho, porém plausívies e que estas foram dadas, supostamente, por alunos do primeiro ano do ensino médio, fase de escolaridade em que eles já estudaram ou estão estudando os conteúdos de função afim e de função exponencial no ensino básico. Os alunos necessitaram de um pouco mais de tempo do que o previsto, cerca de uma hora para responder aos questionamentos, quando então iniciamos nossas discussões.

Chamaremos a primeira dupla de “Alunos A”, a segunda dupla de “Alunos B” e o trio de “Alunos C”. A seguir transcrevemos as respostas ao item (a) dos três grupos:

(a) Em seu ponto de vista qual era o objetivo do professor ao trabalhar esse problema?

Alunos A: *"O objetivo do professor é introduzir a interpretação de funções relacionado com conhecimentos prévios de cotidiando do aluno."*

Alunos B: *"O objetivo do professor ao trabalhar esse problema é mostrar ao aluno que dependendo da sua interpretação, ele pode chegar em dois resultados diferentes pensando em duas maneiras diferentes."*

Alunos C: *"Trabalhar modelagem, interpretação matemáitca e problemas contextualizados."*

Os alunos A e C discordaram da resposta dos alunos B, uma vez que o problema, segundo eles, possuía uma única solução. Argumentaram que não seria plausível utilizar em sala um problema impreciso e que pudesse apresentar soluções diferentes para interpretações diferentes. Para eles, tal atitude, certamente causaria dúvidas e dificuldades nos alunos do ensino básico e apenas contribuiria para reforçar o senso comum que procura atribuir à matemática um grau de dificuldade inalcansável pela maioria das pessoas.

Questionamos então que outros conteúdos ou abordagens poderiam estar por detrás desse problema.

Os alunos B insistiram na ideia de que não era possível identificar as intenções do professor, pois o problema não parecia estar bem descrito. De acordo com eles, o problema poderia tanto ser modelado por uma função afim quanto por uma função exponencial e disseram por fim que o professor poderia ter tido como objetivo discutir as duas funções na mesma aula.

Nesse momento, intervimos na discussão reiterando que o problema possui solução única, mas que a impressão de que pode haver duas interpretações é bastante plausível e comum, conforme citam os autores (Lima et al, 2001). Ressaltamos então a importância do professor fazer um planejamento cuidadoso de sua aula, escolhendo problemas adequados, pensando nas suas diferentes vertentes de interpretação e possíveis soluções. Argumentamos a importância do professor ter um tipo de conhecimento que vai além daquele que está aparentemente descrito na situação proposta e, além disso, deve estar preparado para as possíveis respostas que os alunos podem produzir. Esta habilidade, de acordo com Fernandez & Figueiras (2014) está diretamente relacionada com o HCK e envolve o conhecimento do conteúdo dos alunos (por exemplo, o conhecimento das dificuldades anteriores, atuais e futuras, equívocos e outras questões) e também o conhecimento do conteúdo para o ensino, como por exemplo, diferentes maneiras pelas quais os estudantes podem ver os conteúdos que representam a mesma ideia ou tipos de atividades que facilitam a aprendizagem dos alunos mais a frente. Os licenciandos comentaram então que talvez a atividade proposta não fosse uma atividade plausível para se introduzir o conteúdo de função exponencial e/ou função afim em virtude de ser um problema difícil que gerou dúvidas e dificuldades até para eles, alunos de um curso de licenciatura em matemática.

No segundo questionamento, solicitamos:

(b) Indique a solução que você julga correta e justifique sua escolha. Caso não concorde com nenhuma das duas, aponte a solução correta.

Alunos A: *"A solução que acreditávamos ser mais próxima da resposta correta é a solução do estudante 2, pois o estudante 1 pressupõe que a densidade do cloro é inferior a densidade da água e assim, em certo momento o cloro será eliminidado totalmente. Assim, o estudante 2, considera que o cloro irá se misturar com água e dá importância a taxa constante que a água é colocada na piscina, identificando uma relação entre a quantidade do cloro e do litro."*

Alunos B: "*A dupla acha que ambas as soluções são válidas, pois dependendo da forma interpretada pelo aluno na questão ou dependendo do conceito no qual o professor está trabalhando, a utilização desse problema em sala pode tornar as duas formas de pensamento como válidas. Na primeira solução, o aluno pode interpretar que a cada hora que passa, a quantidade de cloro da piscina é reduzida em 100g da quantidade de cloro anterior, o que nos conduziu a tratar como uma função afim. Já na segunda, a quantidade de cloro é reduzida 10% em relação a quantidade anterior, o que nos leva a pensar que se trata de uma função exponencial. É importante ressaltar que nosso ponto de vista é puramente matemático, sem qualquer outra relação com outra disciplina."*

Alunos C: *"Solução 2. Porque, apesar da entrada de água pura ser constante, a saída de água pelo ladrão altera a concentração de coro na piscina e consequentemente, quanto mais tempo passa, menor é essa concentração e menor é a quantidade de cloro sendo expelida, caracterizando o comportamento de uma função exponencial decrescente."*

Research, Society and Development, v. 9, n. 6, e162963629, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i6.3629

Para Biza, Nardi & Zachariades (2007) existe um distanciamento entre os campos da matemática, pedagogia e prática do professor. De acordo com os autores, a melhor forma de desenvolver esses campos é inserir o docente ou futuro docente numa situação específica. Sabemos que profissionais de outras áreas, tais como da medicina, exploram essas aproximações em suas atividades laborais ainda em seus cursos de formação, porém, para o educador matemático, existe um contexto histórico-social e práticas formativas consolidadas que dificultam a aproximação dessas realidades.

Dentro desse paradigma, podemos concatenar um dos incômodos de Shulman (1986) que foi, justamente, o formato dos cursos de formação de professores que procuravam e ainda procuram separar o Conhecimento do Conteúdo, do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, no qual as preocupações com conteúdo era o foco da formação enquanto que o pedagógico se resumia em questões teóricas sem referenciar a prática. As respostas de nossos alunos, especialmente a dos alunos B, parecem convergir para a crença de que problemas de matemática devem ser resolvidos com conhecimentos matemáticos. Ao citarem que as conclusões foram baseadas em argumentos puramente matemáticos, desvinculados de outras disciplinas e de aspectos pedagógicos, os licenciandos parecem tentar justificar suas respostas com um conhecimento que somente os matemáticos possuem. Dessa forma, argumentamos com a turma que o enunciado do problema sugere que o cloro inserido ao longo do tempo se dissolve na água formando uma substância praticamente homogênea. Essa hipótese só pode ser levantada e discutida se considerarmos nossas vivências agregadas aos conhecimentos oriundos de outras áreas.

Ainda que os alunos do ensino básico não tenham experienciado a mistura das substâncias citadas no problema, já devem ter vivenciado situações análogas que podem ser utilizadas para auxiliar na compreensão da situação do problema apresentado. Nosso objetivo principal não residia em encontrar as respostas corretas e nem discutir diferentes soluções para o problema, mas sim tornar clara a necessidade de se ter um conhecimento que vai além do conhecimento especializado dos conteúdos de funções, o que ficou evidenciado pelas respostas incorretas/incompletas dos licenciandos.

Questionamos aos alunos A se seria realmente necessário ter conhecimentos sobre a densidade das substâncias envolvidas e de que forma isso se relaciona com a eliminação do cloro na substância. Os alunos citaram que chegaram a essa conclusão baseados na ideia de que uma densidade muito baixa poderia ser capaz de eliminar completamente todo o cloro contido na mistura em pouco tempo. Para argumentar sobre essa ideia, citamos como exemplo a ingestão de determinados medicamentos que deve se dar em períodos constantes, conforme

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i6.3629

determinação médica para alguns tratamentos. Questionamos se a quantidade de medicamento presente no sangue também varia com o tempo de acordo com a densidade do medicamento/comprimido e se compreender questões dessa natureza seria imprescindível para a abordagem do problema em sala. Perguntamos então se densidade e concentração são sinônimos e os alunos não souberam responder.

Baseados nessa discussão, os licenciandos afirmaram então que julgavam ser necessários outros conhecimentos mais aprofundados para a abordagem do problema e que somente dominar os conteúdos de funções afim e exponencial não seria o suficiente para justificar e apresentar a resposta correta. Argumentamos então a importância de se "prever" as possíveis respostas e dificuldades dos alunos e de se compreender os melhores caminhos para se discutir e resolver problemas em sala de aula. Levantamos também a discussão de que seria importante valorizar as experiências e vivências dos alunos, recorrendo a situações cotidianas que eles já tivessem experimentado antes, tais como mistura de água e açúcar, ingestão de medicamentos, etc. A utilização desse recurso pode ser um forte aliado ao professor na busca de caminhos alternativos ao conhecimento matemático para que possa convencer os alunos de que a função exponencial é a função que melhor modela o problema em questão.

Avançando para o próximo item, perguntamos:

(c) Estando na posição de professor, como você justificaria para a turma e/ou aluno que a solução dele(s) não está correta?

Alunos A: *"A justificativa é que seria necessário um conhecimento não somente matemático, pois para não cair na solução do estudante 1, é fundamental saber que o cloro se dissolve com facilidade na água, identificando assim uma função exponencial, ou seja, a quantidade de cloro por litro, decresce exponencialmente ao longo do tempo."*

Alunos B: *"Falaríamos que ambas as formas de pensar estão corretas do ponto de vista matemático. Perguntaríamos ao aluno: O que acontece na vida real? Ou seja, o que acontece com o cloro ao passo que a gente acrescenta cada vez mais água? Poderíamos fazer algo com a realidade do aluno, utilizando água e guaraná natural (concentrado). Construiríamos a seguinte situação: Imagina o guaraná natural já misturado com a água. Se tiver muito doce, qual a estratégia para fica menos doce? A dica seria acrescentar mais água. Então concluímos que conforme colocamos água a concentração de guaraná diminui. Será que em* *algum momento acrescentando água, de forma constante, o guaraná concentrado irá acabar? Essas perguntas não conseguiríamos responder apenas com a matemática, dependeríamos de conhecimento de química.”*

Alunos C: *“Analisaria a situação utilizando conceitos básicos de concentração e vazão, justificando porque o modelo linear não é adequado para esse caso. Mostrando que a concentração se altera com a saída de cloro,diminuindo assim a massa presente na piscina:*

$$\downarrow c = \frac{m\downarrow}{v}$$

E, consequentemente, a alteração dessa concentração altera a quantidade de cloro sendo expelida pelo ladrão ao longo do tempo, o que inviabiliza a escolha do modelo linear.”

Assim como discutimos a importância de se valorizar a produção dos alunos do ensino básico em nossa atuação em sala, principalmente os seus equívocos, as respostas dos Alunos B nos permitiu ampliar as discussões e promover um debate enriquecedor entre os licenciandos, uma vez que ao discordarem das respostas dessa dupla, os demais alunos (A e C) procuraram caminhos e argumentos que pudessem, não só convencer os demais dos equívocos, mas que tiveram a predominância de um fundamento lógico-matemático para embasar as discussões. Isso nos fez retomar as respostas dos Alunos A que disseram haver necessidade de se ter um conhecimento além do conhecimento matemático.

Ainda que acreditassem na possibilidade de haver duas soluções corretas para o problema, a justifictiva que os alunos B apresentaram os direcionavam para modelar o problema por uma função exponencial. Salientamos a importância de terem utilizado um exemplo que poderia estar no cotidiano dos alunos (água + guaraná natural) e que a ideia de se fazer diferentes analogias é um recurso fundamental ao professor, conforme aponta Shulman (1986). Perguntamos então se as prórpias justificativas não os direcionavam para uma solução única ao problema e se estas não seriam suficientes para convencê-los de que se tratava de um problema de função exponencial.

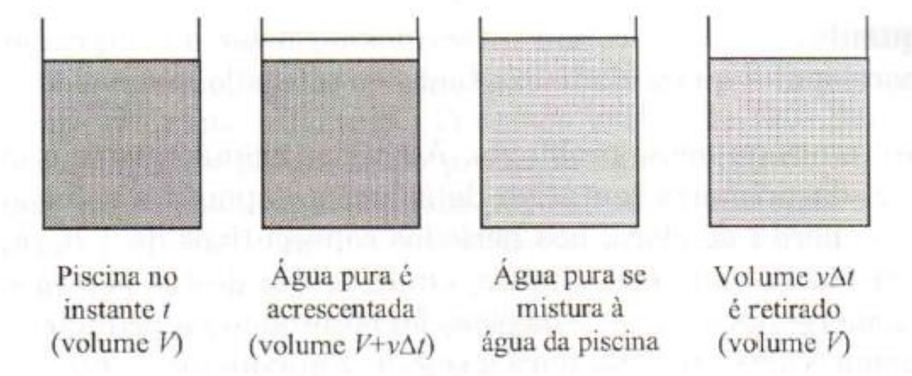
Nesse momento, houve uma pausa, momentos de reflexão, mas não se manisfestaram em admitir que entraram em contradição.

Perguntamos aos alunos A e C se não seria necessário estudar melhor o problema, partir para um experimento empírico antes de levá-lo para a sala de aula, uma vez que eles citaram a necessidade de ter conhecimentos em outras áreas. Perguntamos também se esse conhecimento “a mais” não poderia estar dentro da própria matemática, algo em nível mais avançado que eles não conhecessem.

As respostas se encaminharam para a defesa de que era necessário saber mais sobre vazão, concentração e, talvez um pouco de química. No entanto, afirmamos que os conhecimentos sobre função afim e função exponencial, em um nível mais aprofundado, eram suficientes para resolver o problema, mas insuficientes para utilizá-lo em sala no ensino básico. Nesse momento, apresentamos então a solução do problema para justificar nossa afrimação.

No início do processo, a quantidade c(t) de cloro está uniformemente distribuída em um volume V de líquido. Após a inserção de água pura, a quantidade de cloro não se altera, mas passa a ser distribuída em um volume igual a V + vΔt. Deste novo volume, retira-se vΔt, retendo novamente um volume igual a V, conforme podemos observar na Figura 2, a seguir.

Figura 2: simulação da situação apresentada no problema.



Fonte: Lima et al, 2001, p.45

Como o cloro está distribuído uniformemente, conforme a terceira e quarta imagem da figura, a quantidade de cloro que permanece na pisicina, após a retirada de uma parte, é proporcional ao volume retido. Isto pode ser observado no modelo matemático apresentado Figura 3, a seguir, conforme proposto por Lima et al (2001):

Figura 3: modelo matemático.

	Volume de líquido	Quantidade de cloro
Antes da saída	$V + v\Delta t$	$c(t)$
Depois da saída	V	?

Fonte: LIMA et al, 2001, p.45

O volume desconhecido pode ser dado então por:

$$c(t + v\Delta t) = c(t)\frac{V}{V + v\Delta t}$$

Onde o mais importante é notar que a fração V/(V + vΔt) é constante para cada intervalo de tempo de tamanho Δt.

Dessa forma, após *n* intervalos de tempo, a quantidade de cloro em um intervalo de tamanho nΔt é multiplicada por $\left(\frac{V}{V+v\Delta t}\right)^{n}$, o que nos remete a ideia de um comportamento exponencial para o problema.

Perguntamos então se a apresentação dessa solução para alunos do ensino básico seria conveniente e adequada ou se não seria mais interessante e apropriado fazer analogias, buscar outros exemplos do cotidiano dos alunos.

Todos concordaram que essa é uma justificativa que não ajudaria na compreensão do problema pelos alunos do ensino básico, essencilamente por conta da linguagem matemática utilizada na expressão, mas que esta foi fundamental para que eles, licenciandos, pudessem se convencer que o modelo linear não era capaz de solucionar o problema.

Apontamos então a ideia de que buscar outros exemplos do cotidiano dos alunos seria uma habilidade importante ao professor, uma vez que requer, em primeiro lugar, conhecer bem o seu alunos, suas dificuldades e o que ele traz de bagagem para a sala de aula. Dissemos então que esse é um tipo de conhecimento definido pela literatura como conhecimento pedagógico do conteúdo (Shulman, 1986, Ball et al 2008) e acrescentamos que esta seria uma habilidade que a vivência da sala é fundamental para sua aquisição.

Discutimos então se as dificuldades que eles estavam tendo não eram inerentes ao fato de terem poucas experiências no magistério, aliado a um conhecimento mais aprofundado dos

Research, Society and Development, v. 9, n. 6, e162963629, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i6.3629

conteúdos de função exponencial e função afim que eles não aparentavam ter. Silêncio na sala!

Para finalizar as dicussões, apresentamos o seguinte teorema:

Seja f: R $\rightarrow$ R uma função monótona injetiva, isto é, crescente ou decrescente, tal que para cada x e h, a variação relativa [f(x + h) – f(x)]/f(x) ou equivalentemente, a razão f(x + h)/f(x) depende apenas de h e não de x.

Então, se b = f(0) e a = f(1)/f(0), tem-se

$$f(x) = b.a^x$$

Nosso objetivo ao apresentarmos o teorema foi o de reafimar a necessidade do professor ter um tipo de conhecimento que vai além daquele necessário para a sala de aula, ou seja, um conhecimento específico e mais aprofundado sobre matemática e sobre o ensino de matemática. Em termos matemáticos, o teorema seria suficiente para garantir que a modelagem por meio da função exponencial, no entanto, não seria suficiente para "convencer" alunos do ensino básico, uma vez que este se mostra incompreensível para alunos nesse nível. Discutimos então a importância de se pensar na matemática da sala de aula como sendo um amálgama entre matemática de nível superior e matemática cotidiana, conforme aponta Shulman (1986). Além disso, a resolução desse problema em especial, demonstra também a importância de se conhecer bem o currículo escolar, para saber o que os alunos já estudaram e o que ainda vão estudar, conhecer a realidade de seus alunos, suas dúvidas e dificuldades e também diferentes caminhos e analogias que podem ser feitas para a condução da atividade. Por exemplo, as ideias de concentração, mistura e variação ($t + \mathrm{v}\Delta\mathrm{t}$) advindas da química e da física podem ser muito úteis e importantes para a discussão pedagógica da solução.

Fernandez & Figueiras (2014) observam que o HCK está diretamente relacionado com o conhecimento do currículo, mas as autoras apontam uma certa independência do currículo, uma vez que além dos conhecimentos longitudinais é necessário que se tenha um conhecimento global da evolução do conteúdo matemático e das relações entre suas diferentes áreas necessárias para a prática docente. Este conhecimento global não depende do contexto escolar do currículo a ser trabalhado e é diferente da conscientização do currículo que um professor deve ter para ensinar os tópicos apropriados a um conteúdo específico. Embora os demais subdomínios do diagrama da figura 1 tenham definições e posições claras, mesmo que

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i6.3629

possuam fronteiras que se confundam, o HCK apresenta uma natureza diferente, a medida que se relaciona mutuamente com os demais subdomínos e também porque deve incluir a capacidade do professor para descobrir as idéias matemáticas anteriores dos alunos e prepará-los para o futuro.

Para além disso, destacamos o conhecimento especializado do conteúdo de um professor para uma etapa educacional específica e acrescentamos que esse conhecimento está relacionado ao fato desse professor estar atuando nesse nível ou já ter atuado nele. Em outras palavras, conhecer o que vem antes e o que virá depois em termos de conhecimento especializado e pedagógico do conteúdo não é tarefa fácil para os professores. Seria como esperar que um professor primário conhecesse diferentes maneiras de abordar o conceito de derivada ou que um professor do ensino médio conhecesse a fundo métodos eficientes para a alfabetização matemática (*Ibiden*).

A seguir, nosso último questionamento para discussão:

(d) Em sua opinião, qual(is) o(s) conhecimento(s) necessário(s) ao professor de matemática para responder as perguntas anteriores?

Já estávamos no fim da aula, que se estendeu ao longo de todo o tempo que destinamos para as dicussões, cerca de 240 minutos, quando iniciamos as discussões das respostas que os licenciandos deram a esse questionamento. É interessante destacar que as questões anteriores e as discussões que promovemos foram capazes de nos direcionar ao nosso objetivo, que era o de discutir determinados conhecimentos e habilidades importantes para o trabalho do professor em sala de aula.

Sobres esse questionamento, os alunos citaram que somente nesse momento entenderam o propósito desse item e o que nós, professores, esperávamos como respostas. No entanto, argumentaram que mesmo dando respotas que apenas articulavam conteúdos matemáticos com o problema, compreenderam a ideia de que um problema, aparentemente ingênuo, pode susictar dúvidas, dificuldades que exigem diversas outras habilidades do professor.

Respostas dos licenciandos para o questionamento (d)

Alunos A: *“Os conhecimentos necessários são sobre química (soluções, densidade), conversão de unidades (m^3 para litro), além de conhecimentos matemáticos.”*

Alunos B: *“Porcentagem, função afim, função exponencial.”*

Alunos C: *“Razões, conceitos básicos de concentração e vazão, função afim, função expondencial e modelagem.”*

As respostas nos sugerem que todos os alunos atribuem ao conhecimento especializado uma importância que se sobressai aos demais conhecimentos sugeridos por Shulman (1986) e Ball et all (2008), uma vez que sequer citaram outros conhecimentos/habilidades. Por outro lado, é importante lembramos que nossos alunos estão, em sua maioria, no quinto período do curso de licenciatura (alguns ainda cursavam disciplinas de períodos anteriores) e ainda possuem pouca ou quase nenhuma expericência com a sala de aula.

Perguntamos então qual seria a origem de suas respostas, ou seja, porque demonstraram a crença de que argumentos matemáticos eram suficientes para se trabalhar o problema que discutimos em uma turma do ensino básico. Apenas os alunos B responderam e, em especial, um deles disse que se imaginava dando aulas da mesma forma que um de seus professores de matemática do ensino básico. Ele comentou as referências que possui desse professor e que suas aulas e seus métodos o inspiraram a cursar a licenciatura em matemática.

Ainda que nossa experiência tenha sido desenvolvida com alunos da graduação, o relato acima se coaduna com as ideias de Biza, Nardi & Zachariades (2007), quando se referem às diferentes e diversificadas influências (epistemológicas, pedagógicas, curriculares, profissionais e pessoais) sobre os argumentos que os professores apresentam quando elaboram as decisões que tomam no decorrer de uma aula de matemática. Dessa forma, acreditamos ser essencial a utilização de tarefas nas diversas disciplinas do curso de licenciatura.

Ao encerramos nossa atividade, perguntamos se já haviam discutido ou estudado em outra disciplina do curso os diferentes conhecimentos e habilidades que citamos ao longo de nossas discussões, tais como conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimentos de conteúdo no horizonte, conhecimento do currículo, conhecimento sobre os alunos, além conhecimento para o ensino.

Eles disseram que eram termos novos, mas citaram que conhecer o aluno e saber matemática não eram novidades, uma vez que para dar aula é essencial conhecer a disciplina que se pretende ensinar e o público que vai antender. Assim finalizamos nossa atividade formativa reiterando, mais uma vez, o quão complexa é a tarefa de se ensinar e o quão importante se revela as discussões e reflexões coletivas em sala de aula.

5. Considerações Finais

Biza, Nardi & Zachariades (2007) discutem a importância de se pensar numa prática formativa que seja capaz de fornecer oportunidades efetivas para aprender matemática de forma substancial, mas também que seja capaz de ouvir e valorizar o pensamento e as ideias dos futuros professores. Nesse sentido, acreditamos que as discussões puderam gerar determinados “conflitos” que foram capazes de “desestabilizar” nossos alunos e tirá-los de sua zona de conforto. Tínhamos no gurpo de sete alunos, dois alunos que já atuavam em sala de aula como professores/monitores. Esses alunos se concentraram no trio que identificamos como Alunos C e, por coincidência ou não, foi o grupo que melhor se saiu nas respostas e solução do problema. Notamos uma sensibilidade maior por parte desses alunos ao defenderem os seus pontos de vista, ainda que tenham tido, predominantemente, preocupações e argumentos puramente matemáticos para lidar com as situações e questionamentos que fizemos.

Não tínhamos por objetivo discutir os textos de Shulman (1986), Ball et al (2008) e Biza, Nardi & Zachariades (2007), uma vez que parecem mais adequados para alunos da Pós-Graduação. Por outro lado, acreditamos que as ideias discutidas nesses trabalhos são fundamentais e devem ser abordadas ao longo de toda a graduação, permeando diferentes disciplinas, desde o primeiro semestre do curso de licenciatura.

Dessa forma, ao propormos a utilização de tarefas orientadas para a sala de aula, utilizamos uma estratégia adotada pelas autoras (*Ibiden*) cujo propósito é o de apresentar e discutir um conteúdo matemático que se refere a algo conhecido pelos licenciandos, mas que apresenta uma determinada sutileza ou por causar dificuldades (a partir de literatura e/ou de experiência).

Para contemplar essa demanda, escolhemos uma atividade do livro “Temas e Problemas” (Lima et al, 2001), na qual os autores apontam essas “dificuldades e sutiliezas” defendidas por Biza, Nardi & Zachariades (2007). A resposta fictícia dos alunos nos ofereceu uma oportunidade para os licenciandos refletirem e demonstrarem as formas pelas quais ajudariam o aluno do ensino básico a obter êxito ou superar suas dificuldades. Tanto o conteúdo matemático quanto a resposta fictícia dos alunos fornecem um contexto no qual as escolhas dos professores (matemática, pedagógica e didática) podem emergir.

E foi dessa forma que conduzimos nossa prática formativa, procurando valorizar as vozes dos licenciando. A partir das repostas ficíticas dos alunos e das respostas reais que produziram, conseguimos demonstrar o quão complexa é a tarefa de se ensinar. Conseguimos também enfatizar que o ensino da matemática envolve não só o conteúdo da disciplina em si, mas também conhecimentos inerentes ao cotidiano e a outras disciplinas escolares, além de estruturas e princípios, ou seja, algo amplo no qual exige do professor o desenvolvimento de uma série de conhecimentos e habilidades que se iniciam ainda na graduação e que deve se estender ao longo de sua atuação na sala de aula. Esse tipo de conhecimento não consta nas ementas dos cursos, mas podem e devem ser discutidos ao longo da formação.

Ball et al (2008) chamam atenção para o desenvolvimento de uma "consciência periférica" que faz parte do conhecimento voltado para o ensino, já que este exige um "horizonte" para além da matemática pura. Seria um tipo de consciência, sensibilidade e disposição que informa, orienta e enquadra culturalmente a prática instrucional, conforme apontam os autores. Nessa direção, acreditamos que esses conhecimentos não estão diretamente relacionados a tópicos ou listas de "coisas" que os fututors professores devem aprender, mas se referem à práticas e valores que devem e precisam ser discutidos e trabalhados ao longo de toda a nossa atuação em sala de aula.

Reiteramos então a atenção que deve ser dada à formação inicial dos professores na questão da prática em sala de aula. Como discutir as experiências ainda não vividas à luz da realidade escolar? Nos estágios? No contato com a escola desde cedo, antes de se formar de fato? Acreditamos ser essencial a presença de professores do ensino básico nos cursos de formação de professores, bem como a utilização de tarefas orientadas para a sala de aula, conforme apontam Biza, Nardi & Zachariades (2007).

Como sugestão, recomendamos o uso de tarefas nas diferentes disciplinas dos cursos de licenciatura, com situações e atividades desafiadoras, presentes no dia a dia da sala de aula da escola básica. As tarefas devem envolver temáticas que exijam o conhecimento pedagógico e especializado do conteúdo matemático, de forma a colocar os licenciandos em reflexão, em debate, com o propósito de saírem de suas zonas de conforto. Temas que as vezes parecem de fácil compreensão por parte dos alunos podem se revelar verdadeiros obstáculos epistemológicos.

Sendo assim, esperamos que o trabalho aqui apresentado possa servir de inspiração para outros trabalhos e possa contribuir para uma formação de professores que valorize as discussões e reflexões acerca da complexa tarefa de ensinar, desde o primeiro semestre do curso de licenciatura.

Referências

Ball, D.L., Thames, M.H., Phelps, G. (2008) Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special. *Journal of Teacher Education*, November/December, 59(5): 389-407.

Ball, D. L., Bass, H. (2009) *With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures*, 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik held in Oldenburg, Germany, March 1–4. Acesso em 12 de janeiro de 2020, em https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31305/1/003.pdf

Biza, I., Naardi, E., Zachariades, T. (2007) Using Tasks to Explore Teacher knowledge in Situation-Specific Contexts**.** *Journal of Mathematics Teacher Education*, Springer Netherlands, 301-309. Acesso em 18 de janeiro de 2020, em: https://doi.org/10.1007/s10857-007-9043-y.

Fernández, S., Figueiras, L. (2014) Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. *REDIMAT*, 3(1): 7-29. Acesso em 18 de janeiro de 2020, em http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2014.38. Acesso: Jul 2018.

Lima E. L. et al (2001) *Temas e Problemas*, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.

Pereira, A.S. et al. (2018). *Metodologia da pesquisa científica*. [*e-book*]. Santa Maria. Ed. UAB/NTE/UFSM. Acesso em 16 de abril de 2020, em https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/15824/Lic_Computacao_Metodologia-Pesquisa-Cientifica.pdf?sequence=1.

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i6.3629

Shulman, L. (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher***, 1**5(2): 4-14. Acesso em 18 de janeiro de 2020, em em: http://www.fisica.uniud.it/URDF/masterDidSciUD/materiali/pdf/Shulman_1986.pdf.

Porcentagem de contribuição de cada autor no manuscrito

Fábio Garcia Bernardo – 60%

Jéssica Oliveira de Luna – 40%