Research, Society and Development, v. 13, n. 12, e38131247601, 2024
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v13i12.47601

Determinação dos termos gerais da progressão geométrica de primeira e segunda ordem a partir de uma função exponencial geradora

Determination of the general terms of first and second order geometric progression from an exponential generating function

Determinación de los términos generales de progresión geométrica de primer y segundo orden a partir de una función generadora exponencial

Recebido: 20/11/2024 | Revisado: 26/11/2024 | Aceitado: 27/11/2024 | Publicado: 30/11/2024

Luiz Vitor Soares Póvoas
ORCID: https://orcid.org/0009-0001-9034-5285
Universidade de Pernambuco, Brasil
E-mail: luiz.vitor@upe.br
Paulo Cavalcante do Nascimento Júnior
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7928-3319
Universidade de Pernambuco, Brasil
E-mail: paulo.cavalcantejr@upe.br

Resumo
O objetivo do presente artigo é apresentar um estudo sobre Progressões Geométricas de Primeira e Segunda Ordem. Será apresentada uma nova abordagem para determinação dos termos gerais da Progressão Geométricas de 1ª e de 2ª ordem. Neste novo método é suposto que uma função geradora formada por produtos de funções exponenciais, onde suas bases são constantes a serem determinadas, é o próprio termo geral da Progressão Geométrica. Para determinação das constantes das bases das funções é utilizado o operador quociente na Progressão Geométrica (a_n) gerando novas sequências $((\nabla a_n)\ e\ (\nabla^2 a_n))$. Os primeiros termos de (a_n), $(\nabla a_n)\ e\ (\nabla^2 a_n)$ são comparados aos elementos correspondentes da função geradora produzindo um sistema não linear 3x3, para PG de segunda ordem e um sistema 2x2 se for a PG de primeira ordem. As soluções destes sistemas determinam as bases das respectivas funções geradoras e consequentemente estabelecem as fórmulas dos termos gerais da PG de segunda e primeira ordem. Dentre os resultados, serão apresentados alguns problemas que envolvem progressões geométricas de primeira e segunda ordem como aplicações das progressões.
Palavras-chave: Progressões Geométricas de Primeira Ordem; Progressões Geométricas de Segunda Ordem (PGSO); Sequências; Termo geral.

Abstract
The objective of this article is to present a study on First and Second Order Geometric Progressions. A new approach will be presented for determining the general terms of the 1st and 2nd order Geometric Progression. In this new method, it is assumed that a generating function formed by products of exponential functions, where their bases are constants to be determined, is the general term of Geometric Progression. To determine the constants of the bases of the functions, the quotient operator in Geometric Progression (a_n) is used, generating new sequences $((\nabla a_n)\ e\ (\nabla^2 a_n))$. The first terms of ($a_n$), $((\nabla a_n)\ and\ (\nabla^2 a_n))$. are compared to the corresponding elements of the generating function producing a 3x3 nonlinear system, for P.G. second order and a 2x2 system if it is first order PG The solutions of these systems determine the bases of the respective generating functions and consequently establish the formulas of the general terms of PG second and first order. Among the results, some problems involving first and second-order geometric progressions will be presented as applications of the progressions.
Keywords: First Order Geometric Progressions; Second Order Geometric Progressions (PGSO); Sequences; General term.

Resumen
El objetivo de este artículo es presentar un estudio sobre Progresiones Geométricas de Primer y Segundo Orden. Se presentará un nuevo enfoque para determinar los términos generales de la progresión geométrica de 1.º y 2.º orden. En este nuevo método se supone que una función generadora formada por productos de funciones exponenciales, donde sus bases son constantes por determinar, es el término general de Progresión Geométrica. Para determinar las

constantes de las bases de las funciones se utiliza el operador cociente en Progresión Geométrica (a_n), generando nuevas secuencias $((\nabla a_n)\ y\ (\nabla^2 a_n))$. Los primeros términos de (a_n), $((\nabla a_n)\ y\ (\nabla^2 a_n))$. se comparan con los elementos correspondientes de la función generadora que produce un sistema no lineal de 3x3, para PG de segundo orden y un sistema 2x2 si es P.G. de primer orden. Las soluciones de estos sistemas determinan las bases de las respectivas funciones generadoras y en consecuencia establecen las fórmulas de los términos generales de PG segundo y primer orden. Entre los resultados se presentarán algunos problemas que involucran progresiones geométricas de primer y segundo orden como aplicaciones de las progresiones.
Palabras clave: Progresiones Geométricas de Primer Orden; Progresiones Geométricas de Segundo Orden (PGSO); Secuencias; Término general.

1. Introdução

O estudo das Progressões Geométricas PG tem sido amplamente difundido na matemática com aplicações que se estendem por diversas áreas da ciência. Podem ser observadas aplicações das progressões na física (problemas de radioatividade), na biologia (crescimento populacional e decrescimento), na química (reações em cadeia) e nas engenharias.

Tradicionalmente, esses estudos concentram-se em sua forma mais simples, a progressão geométrica de primeira ordem ou PG Clássica, ou simplesmente PG. No entanto, além destas mencionadas, existem Progressões Geométricas de Ordem Superior (PGOS), ou seja, PG de ordem maior ou igual a dois. A ordem da PG refere-se à quantidade de vezes que o operador quociente é aplicado a uma sequência até chegar à primeira sequência de termos constantes.

Será abordada neste trabalho uma nova forma de determinação do termo geral das PG de primeira e de Segunda Ordem. O método consiste em supor que o termo geral da progressão é uma função geradora, formada por produtos de funções exponenciais, com constantes na base que são desconhecidas e devem ser determinadas para estabelecer a progressão. Desta suposição é gerado um sistema triangular não linear de ordem 2x2, se for uma PG de primeira ordem, e de ordem 3x3, se for uma PGSO, de simples resolução.

É importante salientar que, em termos de pesquisa, as Progressões Geométricas de Ordem Superior são muito pouco difundidas na literatura, e que apresentam vários pontos que ainda não foram estudados. Além disso, possui um grande potencial a ser explorado no que se refere a aplicações em outras áreas.

O objetivo do presente artigo é apresentar um estudo sobre Progressões Geométricas de Primeira e Segunda Ordem. Será apresentada uma nova abordagem para determinação dos termos gerais da Progressão Geométricas de 1ª e de 2ª ordem. Para embasar nossa investigação, inicialmente, abordaremos brevemente o estado da arte e a relevância das sequências, com especial ênfase nas Progressões. Logo em seguida, discutiremos a metodologia adotada neste estudo e os resultados obtidos, proporcionando assim, uma visão abrangente sobre a Progressão Geométrica 2ª ordem. Finalmente, faz-se a proposta de algumas considerações acerca das significâncias das PG de 2ª ordem no meio matemático.

2. Referencial Teórico

As sequências são um assunto interessante por se expandirem em diversos ramos e se tratar de padrões e estes são alvo de diversos estudos desde os primórdios até hoje. (Stewart, 1996, p. 11) destaca que vivemos em um universo repleto de padrões que podem se manifestar de diversas formas, como numéricas, geométricas, de movimento e de espaço, os quais podem ser representados como sequências numéricas. Essas sequências têm sido estudadas desde a antiguidade, quando civilizações como os egípcios e babilônios reconheceram e utilizaram esses padrões para resolver problemas práticos, como prever as cheias do Rio Nilo, essenciais para a agricultura há cerca de 5.000 anos.

De acordo com (Carvalho, 1997, p. 9), “uma sequência ou progressão é formada por um conjunto de números dispostos em uma ordem específica, com termos sucessivos, como primeiro, segundo, terceiro, e assim por diante”. Ela ainda

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v13i12.47601

ressalta que essas sequências podem ser limitadas a um número determinado de termos, caracterizando sequências finitas, ou podem continuar indefinidamente, sendo chamadas de sequências infinitas.

A definição de sequência ou progressão apresentada por *Ibid* (1997, p. 9) destaca dois aspectos fundamentais: ordem específica, onde os números estão dispostos de forma lógica e ordenada, e termos sucessivos, formando uma cadeia contínua. Além disso, ela ressalta a distinção entre sequências finitas, com número determinado de termos Ex: $(2, 4, 6, 8, 10)$, e sequências infinitas, sem fim Ex: $(2, 4, 6, 8, 10 \cdots)$. Essa distinção é crucial para cálculos precisos e previsíveis em sequências finitas, enquanto sequências infinitas demandam conceitos mais abstratos e teorias matemáticas avançadas.

Ademais, uma sequência é um conjunto ordenado de elementos numéricos, indicado comumente por (a_n), onde a_n representa o n-ésimo termo da sequência. Existem várias sequências matemáticas de interesse particular, especialmente aquelas que seguem um padrão específico de formação, como as progressões aritméticas (PA) e geométricas (PG). Dentre essas, as progressões aritméticas e geométricas se destacam pela sua importância no ensino médio e por sua aplicação em matemática financeira, como no cálculo de juros simples e compostos.

Além do mais, (Lopes, 1989, p. 1), afirma que progressão aritmética PA é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ de números (a_n), denominados termos, na qual a diferença entre cada termo a_n e o seu antecedente $a_n - 1$ é um valor constante chamado razão, tal que, $a_n - a_{n-1} =$ r. Ademais, as PA podem ser classificadas como finitas, infinitas, crescentes, constantes ou estacionárias e decrescentes.

Uma PA é designada pelo fato de que cada termo da sequência é obtido somando-se ao termo anterior uma constante, denominada de razão (r). Essa propriedade confere uma diferença fixa entre termos consecutivos, mantendo uma variação linear ao longo da sequência. As progressões aritméticas podem ser classificadas conforme o valor da razão: São constantes quando r = 0, já que todos os termos permanecem iguais; são crescentes se a $r > 1$, o que faz com que os termos aumentem progressivamente; e são decrescentes quando $r < 0$, o que leva a uma sequência em que os valores diminuem.

Paralelamente, conforme explicado por (Lopes 1989, p. 23), uma progressão geométrica PG é uma sequência de números distintos de zero, representada por $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$, em que cada termo a_n, está relacionado ao seu antecedente $a_n - 1$ por um quociente constante, denominado razão, tal que, $\frac{a_n}{a_n - 1} = q$.

Essa definição destaca a característica fundamental da PG, onde cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante, chamada razão (q), resultando em uma proporção constante entre termos consecutivos. Além disso, progressões geométricas são classificadas em relação à sua razão: Constantes quando $q = 1$ todos os termos da sequência são iguais, crescentes se $q > 1$ os termos aumentam progressivamente, decrescentes se $0 < q < 1$ e os termos diminuem em valor absoluto ao longo da sequência, e alternantes se $q < 0$ os sinais dos termos alternam entre positivo e negativo.

As progressões acima mencionadas, Progressão Aritmética PA e Progressão Geométrica PG, também recebem outra denominação por serem comumente estudadas, são chamadas progressões clássicas, ou ainda, progressões de 1ª ordem, atualmente nas Progressão aritméticas/geométricas temos a fórmula do termo geral, Termo médio, Soma dos termos.

Além das progressões aritméticas e geométricas de primeira ordem, existem progressões de ordem superior, que são menos estudadas e possuem um referencial teórico limitado. Estudos recentes, como os de (Nobre & Rocha, 2018), desenvolveram fórmulas para o termo geral de PA de ordem superior utilizando coeficientes binomiais, e outros estudos têm explorado sistemas lineares para derivar tais fórmulas.

Nesse contexto, autores como (Vilela *et al*. 2024), têm expandido o conhecimento disponível ao propor um método inovador para o cálculo do termo geral. Em seu recente capítulo de livro, esses autores desenvolveram uma fórmula para o termo geral de uma progressão aritmética de ordem superior, fundamentada em sistemas lineares. Esse avanço oferece uma abordagem nova e iterativa para o entendimento dessas progressões.

De modo complementar, tem-se o trabalho de (Lopes, 2017), como resultado nos traz uma formula do termo geral das Progressões Geométricas de ordem superior, baseada na análise e comparação de duas progressões geométricas interligadas: uma de primeira ordem, que representa os quocientes entre termos sucessivos da sequência de segunda ordem, e uma de segunda ordem, que é a sequência propriamente dita., seja $(b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$ uma progressão geométrica de primeira ordem com razão q, e $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ a progressão geométrica de segunda ordem, onde cada termo a_n é obtido multiplicando o termo anterior a_{n-1} pelo correspondente termo da sequência b_n. A fórmula do termo geral é dada por: $a_n = a_1.b_1^{n-1}.q^{\binom{n-1}{2}}$. Essa expressão usa a base b_1 elevada a $n-1$, corresponde ao crescimento linear típico de uma progressão geométrica de primeira ordem. Já a razão q aparece elevada ao coeficiente binário $\binom{n-1}{2}$, que reflete o padrão de aumento de "ordem superior" (segunda ordem) da sequência, seguindo a sequência triangular (0, 1, 3, 6, ...).

Neste artigo, focamos nas Progressões Geométricas de Ordem Superior (PGOS), com ênfase na PG de e 2ª ordem. Desenvolveremos uma nova formulação para o termo geral das progressões geométricas de segunda ordem (PGSO) baseada em sistemas não lineares. Este estudo visa não apenas a compreensão teórica desses conceitos, mas também sua aplicação prática em diversos contextos matemáticos e científicos. Ao explorar as propriedades e padrões das PGSO, esperamos enriquecer o conhecimento existente e fornece uma base sólida para futuras pesquisas e aplicações inovadoras.

3. Metodologia

A metodologia científica é importante para se ter reprodutibilidade nos estudos e resultados. Por meio dela seguem-se normas, padrões e boas práticas aceitas pela comunidade acadêmica e científica e, também se classificam os estudos ou investigações. Realizou-se uma pesquisa teórica de natureza quantitativa e lógico-matemática (Pereira et al, 2018; Gil, 2017; Shitsuka et al. 2014; Koche, 2011).

3.1 Progressão Geométrica de Segunda Ordem (PGSO)

3.1.1 Operador quociente

Seja (a_n) a sequência:

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \cdots, a_n). \quad (1)$$

Onde a_i são os termos da sequência, com i = 1, 2,..,n. O Operador Quociente (∇) é um operador que quando aplicado à sequência (a_n) gera uma nova sequência (∇a_n), que é definida pelo quociente do termo sucessor pelo antecessor da Eq. (1).

$$(\nabla a_n) = \left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \frac{a_5}{a_4} \cdots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \right) = (\nabla a_1, \nabla a_2, \nabla a_3, \nabla a_4 \cdots, \nabla a_n). \quad (2)$$

∇a_n é o n-ésimo termo da nova sequência.

Convém notar que como Eq.(2) é uma sequência pode-se aplicar novamente o operador quociente. Assim, aplicando ∇ na Eq. (2), obtém-se uma nova sequência de segunda ordem, $(\nabla(\nabla a_n)) = (\nabla^2 a_n)$, que pode ser expressa como:

$$(\nabla^2 a_n) = \left(\frac{\nabla a_2}{\nabla a_1}, \frac{\nabla a_3}{\nabla a_2}, \cdots, \frac{\nabla a_n}{\nabla a_{n-1}} \right) = \tag{3}$$

$$= \left(\frac{a_3\, a_1}{a^2{}_2}, \quad \frac{a_4\ a_2}{a^2{}_3}, \quad \frac{a_5\ a_3}{a^2{}_4}, \cdots, \frac{a_n a_{n-2}}{a^2{}_{n-1}} \right) =$$

$$= (\nabla^2 a_1, \nabla^2 a_2, \nabla^2 a_3, \cdots, \nabla^2 a_n).$$

Uma sequência será uma progressão geométrica se ao aplicar o operador quociente na sequência chega-se a uma sequência de termos constante. E a ordem da PG é dada pelo número de vezes que o operador foi aplicado até chegar à primeira sequência de termos constantes q_k (o termo q_k é denominado razão da PG de ordem k). Assim, tem-se que:

$$(\ a_2 a_1^{-1}, a_3 a_2^{-1}, a_4 a_3^{-1}, \cdots, a_n a_{n-1}^{-1}) = (q_1, q_1, \cdots, q_1). \tag{4}$$

É a PG de primeira ordem.

$$(\ a_3\, a_2^{-2} a_1, a_4\, a_3^{-2} a_2, \cdots, a_n\ a_{n-1}^{-2} a_{n-2}) = (q_2, q_2, \cdots, q_2). \tag{5}$$

É a PG de segunda ordem. Assim, todos os termos do lado esquerdo da igualdade são iguais na Eq.(4), em particular, $\nabla a_1 = q_1$. Semelhantemente, $\nabla^2 a_1 = q_2$.

Exemplos 1. a) A sequência $(a_n) = (3, 6, 12, 24, 48, \cdots)$, onde $a_1 = 3$ e $a_2 = 6$, para n ≥ 1, é uma PG de primeira ordem, pois, aplicando-se o operador quociente nota-se: $(\nabla a_n) = \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{6}, \frac{24}{12}, \frac{48}{24}, \cdots \right) = (2, 2, 2, 2, \cdots)$.

b) A sequência $(a_n) = (1, 2, 12, 216, 11664, \cdots)$, onde $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$, para n ≥ 1, é uma (PGSO), pois, aplicando-se o operador quociente nota-se: $(\nabla a_n) = \left(\frac{2}{1}, \frac{12}{2}, \frac{216}{12}, \frac{11664}{216}, \cdots \right) = (2, 6, 18, 54, \cdots)$, aplica-se o operador quociente novamente, $(\nabla^2 a_n) = \left(\frac{6}{2}, \frac{18}{6}, \frac{54}{18}, \cdots \right) = (3, 3, 3, \cdots)$.

c) A sequência $(a_n) = (-2, -6, -36, -432, -10368, \cdots)$, onde $a_1 = -2$ e $a_2 = -6$, para n ≥ 1, é uma (PGSO), pois, aplicando-se o operador quociente temos: $(\nabla a_n) = \left(\frac{-6}{-2}, \frac{-36}{-6}, \frac{-432}{-36}, \frac{-10368}{-432}, \cdots \right) = (3, 6, 12, 24, \cdots)$, aplica-se o operador quociente novamente, $(\nabla^2 a_n) = \left(\frac{6}{3}, \frac{12}{6}, \frac{24}{12}, \cdots \right) = (2, 2, 2, \cdots)$.

3.1.2 Fórmula de recorrência de uma Progressão Geométrica

A fórmula de recorrência é um método matemático que define cada termo de uma sequência (a_n) em função dos termos anteriores, juntamente com um conjunto de valores iniciais. Esta fórmula permite gerar sequências numéricas de forma sistemática, onde cada novo elemento é calculado com base em uma relação específica estabelecida pelos termos precedentes, possibilitando a formação de qualquer sequência.

Segundo (Iezzi & Hazzan, 2013): Chama-se progressão geométrica (P.G.) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v13i12.47601

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{cases} \quad \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{n} \geq 2. \tag{6}$$

Em que a e q são números reais dados. Assim, uma PG é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada.

Exemplos 2. a) Tomando $a_1 = -1$ e $q = 2$, para n ≥ 2, tem-se uma PG de primeira ordem, pois, aplicando-se a fórmula de recorrência da Eq. (6) nota-se: $(a_2) = -1 \cdot 2 = -2$,

$(a_3) = -2 \cdot 2 = -4$, $(a_4) = -4 \cdot 2 = -8$ e assim por diante, formando a sequência: $(a_n) = (-1, -2, -4, -8, -16, \ldots)$.

b) Tomando $a_1 = -54$ e $q = \frac{1}{3}$, para n ≥ 2, é uma PG de primeira ordem, pois, aplicando-se a fórmula de recorrência da Eq.(6) nota-se: $(a_2) = -54 \cdot \frac{1}{3} = -18$, $(a_3) = -18 \cdot \frac{1}{3} = -6$, $(a_4) = -6 \cdot \frac{1}{3} = -2$, e assim por diante, formando a sequência: $(a_n) = \left(-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3} \ldots\right)$.

Tratando-se de uma PGSO, enquanto uma PG de primeira ordem é definida pela relação simples da Eq. (6), uma PGSO introduz uma dependência adicional, envolvendo dois termos anteriores na sequência, segue abaixo sua demonstração.

A partir da Eq. (1), seja uma progressão geométrica de segunda ordem, logo tem-se:

$$(\nabla^2 a_n) = (a_3\, a_2{}^{-2}\, a_1, a_4\, a_3{}^{-2}\, a_2, \cdots, a_n\, a_{n-1}{}^{-2}\, a_{n-2}) = (q, q, \cdots, q). \tag{7}$$

Tomando o n-ésimo termo da sequência, nota-se:

$$(a_n\, a_{n-1}{}^{-2} a_{n-2}) = (q, q, \cdots, q). Logo, tem-se\ q,\ \frac{a_n\, a_{n-2}}{a_{n-1}{}^2} = q. \tag{8}$$

Por fim, isolando a_n na Eq. (8), encontra-se a fórmula de recorrência para uma PGSO.

$$a_n = q\, \frac{(a_{n-1})^2}{a_{n-2}}. \tag{9}$$

Onde, a_1, a_2 e q devem ser valores dados.

$$a_n = \begin{cases} a_1\,,\ n = 1 \\ a_2\,,\ n = 2 \\ q\, \frac{(a_{n-1})^2}{a_{n-2}},\ \ n \geq 3 \end{cases}. \tag{10}$$

Exemplos 3. a) Tomando-se $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $q = 3$, para n ≥ 3, tem-se uma PGSO, aplicando-se a fórmula de recorrência da Eq. (10), nota-se: $(a_3) = 3 \cdot \frac{2^2}{1} = 12$, $(a_4) = 3\, \frac{12^2}{2} = 216$, dentre outros, justamente a sequência do exemplo 1. Letra b). Dada por: $(a_n) = (1, 2, 12, 216, 11664, \cdots)$.

b) Assumindo-se $a_1 = -2$, $a_2 = -6$ e $q = 2$, para n ≥ 3, tem-se uma PGSO, aplicando-se a fórmula de recorrência da Eq.(10), nota-se: $(a_3) = 2\ \frac{(-6)^2}{-2} = -36$, $(a_4) = 2\ \frac{(-36)^2}{2} = -432$ entre outros, justamente a sequência do exemplo 1. Letra c). Dada por $(a_n) = (-2, -6, -36, -432, -10368, \cdots)$.

Portanto, a fórmula de recorrência da Eq. (10) é válida para uma PGSO, este método sistemático permite a geração de sequências complexas, explorando padrões de dependência entre múltiplos termos precedentes.

3.2 Fórmula do termo geral de uma PGOS

Uma progressão geométrica, ou seja, uma PG de 1ª ordem, pode ser representada por uma função exponencial, onde o domínio é o conjunto dos números naturais não-nulos. (Fonseca 2013, p. 24)

$$E_1(n) = C_1^n\ C_0. \tag{11}$$

Analogamente, como na Progressão Geométrica de 1ª ordem, podemos afirmar que as PGSO podem ser representadas por uma função exponencial, podemos afirmar que, seu termo geral a_n também é representada por uma função exponencial na variável n, logo:

$$E_2(n) = C_2^{n^2}\ C_1^n\ C_0. \tag{12}$$

Portanto, o n-ésimo termo da sequência pode ser dado por:

$$a_n = E_2(n) = C_2^{n^2}\ C_1^n\ C_0. \tag{13}$$

Ademais.

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) = \big(E_2(1), E_2(2), E_2(3), \cdots, E_2(n)\big). \tag{14}$$

Logo, afirma-se que toda PGOS pode ser escrita a partir da Eq. (13) pois, a relação com uma função exponencial ocorre uma vez que a expressão é semelhante à forma de uma função exponencial, onde a base C_K é elevada à potência n^k.

A PG é sempre associada as funções exponenciais sendo demonstradas por diversas pessoas por exemplo Fonsêca (2013), demonstra em sua dissertação que, a partir do estudo de progressões geométricas pode-se fazer uma interligação com funções exponenciais. Em um capítulo de seu trabalho são tratadas as definições, características, propriedades e representações gráficas das funções exponencias, e em seguida é demonstrada a sua relação com a progressão e geométrica.

3.2.1 Termo geral de uma PG de 1ª ordem

Presumindo uma Progressão Geométrica (PG) de 1ª ordem e seu termo geral a_n. Seguindo a Eq. (1), a sequência (a_n) pode ser expressa por uma exponencial, $E_1(n)$, definido como:

$$a_n = E_1(n) = \ {C_1}^n\ C_0. \tag{15}$$

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v13i12.47601

Aqui, C_1 e C_0 são coeficientes que devem ser determinados com base nos parâmetros $(\nabla a_1 = q \ e \ a_1)$que caracterizam uma Progressão Geométrica de 1ª Ordem. Além disso, como $E_1(n)$ é uma função exponencial ela pode ser completamente definida a partir de dois pontos específicos, a saber, $E_1(1)$ e $E_1(2)$. Ou seja, para $n = 1$, tem-se:

$$E_1(1) = a_1 = C_1 \ C_0. \tag{16}$$

E, para $n = 2$, tem-se:

$$E_1(2) = a_2 = {C_1}^2 \ C_0. \tag{17}$$

Substituindo a Eq. (16) e Eq. (17) na Eq. (2), aplicando o operador quociente para o primeiro termo, tem-se:

$$\nabla a_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{E_1(2)}{E_1(1)} = \frac{{C_1}^2 \ C_0}{C_1 \ C_0} = C_1. \tag{18}$$

Note que, ∇a_1 representa o primeiro quociente da sequência (a_n), é importante ver que, esse $\nabla a_1 = q$, ou seja, ∇a_1 é a razão da PG de 1ª ordem pois, por se tratar de uma PG clássica, quando fazemos o quociente entre os termos, temos uma sequência de variáveis constantes chamadas de razão.

Com esses dados da Eq. (16) e Eq. (18) forma-se um sistema não linear, com duas incógnitas, dado por:

$$\begin{cases} C_1 \ C_0 = a_1 \\ C_1 = \nabla a_1 \end{cases}. \tag{19}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se os respectivos valores para as incógnitas $C_1 = \nabla a_1$ e $C_0 = \frac{a_1}{\nabla a_1}$, que substituindo na equação Eq. (15) chega-se na fórmula do termo geral de uma PG:

$$(a_n) = E_1(n) = {C_1}^n \ C_0 = \nabla^n a_1 \ \frac{a_1}{\nabla a_1}. \tag{20}$$

Resulta-se:

$$(a_n) = a_1(\nabla^n a_1 \ \nabla^{-1} a_1) = a_1 \ \nabla^{n-1} a_1 = a_1 \ q^{n-1}. \tag{21}$$

Neste contexto, a Eq. (21) representa o termo geral de uma Progressão Geométrica de 1ª Ordem, que é justamente a fórmula usada para o termo geral de um PG tradicional.

3.2.2 Termo geral de uma PG de 2ª ordem

Presumindo uma PGSO com seu termo geral a_n. Seguindo, a sequência (a_n) pode ser expressa por uma exponencial, $E_2(n)$,definido como:

$$(a_n) = E_2(n) = {C_2}^{n^2} \ {C_1}^n \ C_0. \tag{22}$$

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v13i12.47601

Aqui, C_2, C_1 e C_0 são coeficientes que devem ser determinados com base nos parâmetros $(\nabla^2 a_1 = \mathrm{q}\,, \nabla a_1\ e\ a_1)$que caracterizam uma PGSO. Além disso, como $E_2(n)$ é uma exponencial, ela é completamente definida a partir de três pontos específicos, a saber, $E_2(1)$, $E_2(2)$ e $E_2(3)$. Ou seja, para $n = 1$, temos:

$$a_1 = E_2(1) = \ {C_2}^1\, {C_1}^1\ C_0. \tag{23}$$

para $n = 2$, temos:

$$a_2 = E_2(2) = \ {C_2}^4\, {C_1}^2\ C_0. \tag{24}$$

para $n = 3$, temos:

$$a_3 = E_2(3) = \ {C_2}^9\, {C_1}^3\ C_0. \tag{25}$$

Comparando a Eq. (23), Eq. (24), na Eq. (2), e realizando o operador quociente entre o primeiro termo $n = 1$, o segundo termo $n = 2$, tem-se:

$$\nabla a_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{E_2(2)}{E_2(1)} = \frac{{C_2}^4\, {C_1}^2\, C_0}{{C_2}^1\ {C_1}^1\, C_0} = \ {C_2}^3\, {C_1}^1 = \nabla a_1. \tag{26}$$

Comparando a Eq. (23), Eq. (24), Eq. (25), na Eq. (3), e realizando o operador quociente mais uma vez entre o primeiro termo $n = 1$, segundo termo $n = 2$, o terceiro termo $n = 3$, tem-se:

$$\nabla^2 a_1 = a_3\ a_2^{-2}\ a_1 = E_2(3)\ [E_2(2)]^{-2}\, E_2(1) = \left(\ {C_2}^9\ \ {C_1}^3\ \ C_0\right)\left(\ {C_2}^4\, {C_1}^2\ \ C_0\right)^{-2}\left(\ {C_2}^1\, {C_1}^1\ \ C_0\right) = \ {C_2}^2 = \nabla^2 a_1. \tag{27}$$

Note que, $\nabla^2 a_1$ representa o segundo quociente da sequência (a_n), é importante ver que, esse $\nabla^2 a_1 = q$, ou seja, $\nabla^2 a_1$ é a razão da PGSO pois, a intenção de fazemos o operador quociente entre os termos é chegar em uma sequência de variáveis constantes chamadas de razão.

Com esses dados da Eq. (23), Eq. (26) e Eq. (27) forma-se um sistema de equações não lineares com três incógnitas, dado por:

$$\left\{\begin{array}{r} {C_2}^1\, {C_1}^1\ \ C_0 = a_1 \\ {C_2}^3\, {C_1}^1 = \nabla a_1 \\ {C_2}^2 = \nabla^2_{a_1} \end{array}\right. \tag{28}$$

Quando resolvido o sistema acima, resulta nos valores das incógnitas C_2, C_1 e C_0:

$$C_2 = (\nabla^2 a_1)^{\frac{1}{2}}\,,\ C_1 = \nabla a_1\ (\nabla^2 a_1)^{-\frac{3}{2}},\ C_0 = a_1\ (\nabla a_1)^{-1}\ \nabla^2 a_1. \tag{29}$$

Substituindo os coeficientes encontrados na Eq. (29), obtém-se a fórmula do termo geral da PGSO.

$$a_n = \left[(\nabla^2 a_1)^{\frac{1}{2}}\right]^{n^2} \left[\nabla a_1 \, (\nabla^2 a_1)^{-\frac{3}{2}}\right]^{n} \, [a_1 \, (\nabla a_1)^{-1} \, \nabla^2 a_1]. \tag{30}$$

$$a_n = (\nabla^2 a_1)^{\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1} \, (\nabla a_1)^{n-1} \, a_1. \tag{31}$$

Ou ainda, de acordo com Lopes (2017), dissertação de mestrado de Fernando Henrique Lopes:

$$a_n = a_1 \, b_1^{\binom{n-1}{1}} \, q^{\binom{n-1}{1}}. \tag{32}$$

Onde $q_1 = b_1$, e $q_2 = q$, é a razão da progressão de primeira ordem.

Portanto, chegamos à fórmula do termo geral de uma PGSO, ao qual utilizamos um sistema não linear para encontrar os respectivos valores das constantes C_2, C_1 e C_0 e substitui-los na função exponencial ao qual uma PG pode ser representada, e com isso concluímos a demonstração da nova ferramenta que permitirá encontrar qualquer termo arbitrário da PG de 2ª ordem, partiremos agora para algumas aplicações dessa fórmula na prática de exercícios.

4. Resultados e Discussão

Os resultados obtidos neste estudo destacam as características essenciais das progressões geométricas, além de suas extensões para progressões de ordens superiores, alinhando-se às bases teóricas apresentadas. Conforme discutido por (Carvalho, 1997), as sequências, enquanto conjuntos ordenados de números, podem ser finitas ou infinitas. Esta distinção é crucial para a análise de padrões numéricos, uma vez que sequências finitas apresentam aplicações práticas diretas, enquanto as infinitas demandam abordagens teóricas mais complexas. Verificou-se que a formulação de progressões de ordens superiores exige a transição do conceito de sequência finita para uma abordagem que incorpore infinitude e abstração, corroborando a visão de *Ibid* (1997, p. 9) sobre a necessidade de precisão matemática nesses casos.

A definição de PA apresentada por (Lopes, 1989) foi fundamental para interpretar a regularidade nos resultados obtidos. A fórmula do termo geral foi validada em experimentos numéricos para progressões finitas e infinitas, confirmando a linearidade da PA em diversas aplicações. Além disso, os critérios de classificação (crescentes, constantes ou decrescentes) discutidos por Lopes também foram observados, influenciando diretamente as propriedades dos sistemas analisados. Esses resultados mostram que as PA são adequadas para modelar problemas que envolvam crescimento ou declínio linear.

No caso da PG, a abordagem de (Lopes, 1989) também se mostrou consistente. A fórmula do termo geral e as classificações associadas à razão foram verificadas experimentalmente. De maneira complementar, a análise dos comportamentos alternantes da PG reforçou o papel da razão negativa como um fator determinante em aplicações que envolvam alternância de sinais, como em modelos financeiros com variações de lucro e prejuízo.

Adicionalmente, os estudos de (Nobre & Rocha, 2018) sobre progressões aritméticas de ordens superiores foram de grande valor para o desenvolvimento e resolução de problemas interessantes na matemática como: Números Figurados, números poligonais, números naturais em espiral retangular e o triangulo de Pascal.

Por outro lado, (Lopes, 2017) fornece uma perspectiva inovadora ao conectar progressões geométricas de ordens superiores (PGOS) a progressões de primeira ordem, por meio de relações entre termos sucessivos. Essa abordagem foi confirmada nos resultados deste estudo sendo eficaz para representar padrões em progressões geométricas de segunda ordem.

Os resultados também confirmam os avanços recentes de (Vilela et al. 2024), que propuseram uma abordagem iterativa baseada em sistemas lineares para progressões aritméticas de ordens superiores. No contexto deste estudo, tal abordagem revelou-se especialmente útil para validar experimentalmente as propriedades das progressões de segunda ordem, bem como para explorar aplicações práticas.

Dessa forma, ao integrar as contribuições teóricas discutidas no referencial teórico com os resultados experimentais, observa-se que as propriedades fundamentais das progressões clássicas (PA e PG) são efetivamente generalizáveis, similarmente ocorrendo nas progressões de ordens superiores. Este trabalho não apenas reforça os achados dos autores previamente mencionados, mas também contribui com uma nova perspectiva sobre as aplicações práticas dessas progressões, em especial no contexto de padrões complexos.

Vamos ver algumas aplicações de PGSO

a. Em uma colônia de microrganismos, o número de microrganismos aumenta a cada hora. No início da observação, a colônia tinha apenas 3 microrganismos e na 2ª hora 5 microrganismos não seguindo um padrão imediato. Esta situação pode ser modelada por uma sequência onde cada termo representa o número de microrganismos após cada hora. A sequência $(a_n) = (3, 5, 25, 375, 16875, \cdots)$. Determine o número de microrganismos na colônia após 7 horas, ou seja, encontre o 7º termo desta sequência.

Resolução.

Vamos aplicar o operador quociente ∇a_n para saber de qual ordem se trata está sequência.

$$(\nabla a_n) = \left(\frac{5}{3}, \frac{25}{5}, \frac{375}{25}, \frac{16875}{375} \cdots \right) = \left(\frac{5}{3}, 5, 15{,}45 \cdots \right).$$

Percebe-se que não encontra-se uma constate então, não trata-se de um PG de 1 ordem, faremos o operador quociente ∇ pela segunda vez, temos:

$$(\nabla^2 a_n) = (3, 3, 3, \cdots).$$

Note que, chega-se em um constante, logo trata-se de uma PG de 2ª ordem, utilizando agora a fórmula do termo geral aqui desenvolvida para PG de 2ª ordem, temos.

$$a_n = (\nabla^2 a_1)^{\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1} (\nabla a_1)^{n-1} a_1 .$$

Substituindo o $\nabla^2 a_1$ pela constate q = 3 que é o primeiro termo da sequência $(\nabla^2 a_n)$, e ∇a_1 por $5/3$ onde é o primeiro termo da sequência (∇a_n) e por fim $a_1 = 3$ primeiro termo da sequência (a_n) dada inicialmente, logo.

$$a_7 = (3)^{\frac{7^2}{2} - \frac{3 \cdot 7}{2} + 1} \left(\frac{5}{3}\right)^{7-1} (3)$$

$$a_7 = (3)^{\frac{49-21+2}{2}} \left(\frac{5}{3}\right)^{6} (3)$$

$$a_7 = (3)^{15} \left(\frac{5}{3}\right)^{6} (3)$$

$$a_7 = (3)^{10}\,[5]^6$$

$$a_7 = 922640625.$$

Portanto o 7º termo da sequência (a_n) é 922640625.

b. Uma fazenda produziu 1 tonelada de trigo em seu primeiro ano de operação. A cada ano, a produção aumenta algumas toneladas em relação ao ano anterior. Associando esse crescimento a uma sequência $(a_n) = (1, 2, 12, 216, 11664 \cdots)$, ao qual cada termo se refere a quantidade de toneladas de trigo produzidas a cada ano, determine a produção total de trigo que foram produzidas nos 6 primeiros anos dessa fazenda.

Resolução.

Verificaremos primeiro do se trata essa sequência, se é uma PG de 1ª ou 2ª ordem, faremos isso usando o operador quociente ∇.

$$(\nabla a_n) = \left(\frac{2}{1}, \frac{12}{2}, \frac{216}{12}, \frac{11664}{216} \cdots \right) = (2, 6, 18, 54 \cdots).$$

Como não obtém-se uma sequência constante, aplicaremos novamente o ∇.

$$(\nabla^2 a_n) = \left(\frac{6}{2}, \frac{18}{6}, \frac{54}{18}, \cdots \right) = (3, 3, 3, \cdots).$$

Note que, chegamos em uma constante, e realizou-se o operador diferença 2 vezes, portanto se trata de uma PG de 2ª ordem, e aplicando a fórmula do termo geral, temos.

$$a_n = (\nabla^2 a_1)^{\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1}\,(\nabla a_1)^{n-1}\,(a_1).$$

Nota-se que ele pede a soma e todas as toneladas produzidas nos 6 primeiros anos (termos), e veja que a sequência dada que mostra a quantidade de toneladas a cada ano só vai até o 5 ano, ou seja, usaremos a fórmula do termo geral para encontrar o 6º termo da sequência.

$$a_6 = (3)^{\frac{6^2}{2} - \frac{3 \cdot 6}{2} + 1}\,(2)^{6-1}\,(3)$$

$$a_6 = (3)^{\frac{36-18+2}{2}}\,(2)^5\,(3)$$

$$a_6 = (3)^{10}\,(2)^5\,(3)$$

$$a_6 = 5668704.$$

Por fim, somando $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ temos:

$S = 1 + 2 + 12 + 216 + 11664 + 5668704.\ Logo,\ S = 5668704$ Toneladas produzidas em 6 anos.

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v13i12.47601

c. Verifique se as sequências dadas são progressões geométricas de segunda ordem. Em caso afirmativo, encontre o 6º termo de cada sequência.

a) $\left(1, 5, \frac{75}{2}, \frac{3375}{8} \cdots\right)$

b) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{-128}{3}, \frac{-4096}{3}, \cdots\right)$

c) $\left(-4, \frac{-11}{3}, -3, -2, \cdots\right)$

Resolução.

a) $(a_n) = \left(1, 5, \frac{75}{2}, \frac{3375}{8} \cdots\right)$, utilizando o operador quociente para ver se uma PG de 2ª ordem.

$$(\nabla a_n) = \left(\frac{5}{1}, \frac{\frac{75}{2}}{5}, \frac{\frac{3375}{8}}{\frac{75}{2}}, \cdots\right) = \left(5, \frac{15}{2}, \frac{45}{4}, \cdots\right).$$

Aplicando novamente o operador quociente temos:

$$(\nabla^2 a_n) = \left(\frac{\frac{15}{2}}{5}, \frac{\frac{45}{4}}{\frac{15}{2}}, \cdots\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \cdots\right).$$

Portanto, visto tratar-se de uma PG de 2ª ordem, vamos determinar seu 6º termo:

$$a_6 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{6^2}{2} - \frac{3 \cdot 6}{2} + 1} (5)^{6-1} \ (1)$$

$$a_6 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{36-18+2}{2}} (5)^5 \ (1)$$

$$a_6 = \left(\frac{3}{2}\right)^{10} (5)^5 \ (1)$$

$$a_6 = 180203{,}24707031.$$

b) $(a_n) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{-128}{3}, \frac{-4096}{3}, \cdots\right)$, utilizando o operador quociente para ver se é uma PG de 2ª ordem.

$$(\nabla a_n) = \left(\frac{\frac{-8}{3}}{\frac{-1}{3}}, \frac{\frac{-128}{3}}{\frac{-8}{3}}, \frac{\frac{-4096}{3}}{\frac{-128}{3}}, \cdots\right) = (8, 16, 32, \cdots).$$

Aplicando novamente o operador quociente temos:

$$(\nabla^2 a_n) = \left(\frac{16}{8}, \frac{32}{16}, \cdots\right) = (2, 2, 2, \cdots).$$

Portanto, visto tratar-se de uma PG de 2ª ordem, vamos determinar seu 6º termo:

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v13i12.47601

$$a_6 = (2)^{\frac{6^2}{2}-\frac{3\cdot 6}{2}+1}\ (8)^{6-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$a_6 = (2)^{\frac{36-18+2}{2}}\ (8)^{5}\ \left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$a_6 = (2)^{10}\ (8)^{5}\left(\frac{-1}{3}\right)$$

$$a_6 = \ \frac{33554432}{3}.$$

c) $(a_n) = \left(-4, \frac{-11}{3}, -3, -2, \cdots\right)$, utilizando o operador quociente para ver se uma PG de 2ª ordem.

$$(\nabla a_n) = \left(\frac{\frac{-11}{3}}{-4}, \frac{-3}{\frac{-11}{3}}, \frac{-2}{-3}, \cdots \right) = \left(\frac{11}{12}, \frac{9}{11}, \frac{2}{3} \cdots\right).$$

Aplicando novamente o operador quociente temos:

$$(\nabla^2 a_n) = \left(\frac{\frac{9}{11}}{\frac{11}{12}}, \frac{\frac{2}{3}}{\frac{9}{11}}, \cdots \right) = \left(\frac{108}{121}, \frac{22}{27}, \cdots\right).$$

Portanto, não se encontra uma constante, logo não trata-se de uma PG de 2ª ordem.

5. Conclusão

O presente artigo explorou de maneira inovadora e sistemática a Progressão Geométrica de 2ª Ordem, oferecendo uma nova formulação para o termo geral baseada em sistemas não lineares. Ao longo da pesquisa, foi possível desenvolver uma fórmula iterativa e sistemática para encontrar qualquer termo de uma PG de 2ª ordem, representando um avanço significativo na área. A abordagem proposta vai além da compreensão teórica tradicional, a lei de recorrência apresentada, permitiu identificar padrões e propriedades intrínsecas dessas progressões, enriquecendo o conhecimento existente e abrindo caminhos para aplicações inovadoras.

A utilização do Operador Quociente (∇) como ferramenta fundamental na definição das PG de 2ª ordem, permitiu uma análise precisa da relação entre os termos da sequência, proporcionando uma compreensão mais profunda da estrutura dessas progressões. A fórmula de recorrência proposta, que não foi identificada em materiais de referência existentes, destaca-se como um avanço notável, possibilitando a formação de PG de 2ª ordem de maneira flexível e personalizada. Os exemplos fornecidos da fórmula de recorrência, permitiu a construção de PG de 2ª ordem a partir da escolha arbitrária de uma constante (q) e dos dois primeiros termos consecutivos a_1 e a_2. Essa abordagem oferece um método iterativo e abrangente para a geração de sequências, ampliando as possibilidades de estudo e aplicação das PG de 2ª ordem.

Além do mais, o artigo destaca a relação entre as PG de 2ª ordem e funções exponenciais, evidenciando a interconexão entre esses conceitos matemáticos. A fórmula do termo geral apresentada permite uma representação exponencial das PG de 2ª ordem, contribuindo para uma compreensão mais abrangente dessas sequências. Em síntese, este estudo não

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v13i12.47601

apenas avança o entendimento sobre as Progressões Geométricas de Ordem Superior, mas também fornece uma base sólida para futuras pesquisas e aplicações inovadoras no campo da matemática, biologia, física e engenharia.

Por fim, algumas possibilidades interessantes de futuras pesquisas na área das progressões de ordem superior se destacam tais como, explorar a aplicabilidade do método proposto em modelagens reais de problemas nas ciências naturais, como crescimento populacional ou processos químicos dinâmicos, onde as progressões geométricas são frequentemente utilizadas. Além disso, recomenda-se a continuação do estudo com progressões geométricas de 3, e k ordens superiores, para determinar sua fórmula do termo geral, padrões e novas propriedades. Por fim, seria relevante desenvolver algoritmos computacionais que automatizem a resolução dos sistemas não lineares associados, viabilizando o uso desse método em larga escala por pesquisadores e profissionais. Essas abordagens podem ampliar o escopo de aplicação das progressões geométricas e fortalecer ainda mais a relevância do tema na matemática e em áreas correlatas.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade de Pernambuco - UPE, campus Garanhuns, aos nossos professores e a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização e sucesso deste artigo.

Referências

Aref, A. N. et al. (1979), *Progressões e Logaritmos*, Volume 2. Editora Moderna, Coleção Noções de Matemática.

Barros, J. P., & Silva, L. C. (2022). *Análise de Sequências e Progressões no Ensino Médio: Uma Perspectiva Histórica*. Revista Brasileira de Matemática Escolar, 10(4), 321-340. https://revbrasmatem.org.br/sequencias-progressoes.

Borwein. J. M. & Borwein, P. B. (1984). *The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions*. SIAM Review, 26(3), julho de 1984.

Carvalho, M. C. C. S. (1997). *Padrões Numéricos e Sequências*. Moderna.

Fonseca, N. P. D. (2013). *Uma Proposta Alternativa para o Ensino de Progressões Relacionadas a Funções*. 2013. 41 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, 2013. https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/18658.

Gil, A. C. (2017). *Como elaborar projetos de pesquisa*. (6ed.). Atlas.

Gouveia, R. (s.d.). *Progressão Geométrica*. Toda Matéria, *[s.d.]*. https://www.todamateria.com.br/progressao-geometrica/.

Howard, E. (2008). *Introdução a História da Matemática*. Editora Unicamp.

Iezzi, G. & Hazzan, S. (2013). *Fundamentos de matemática elementar*, 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. (8ed.). Atual.

Koche, J. C. (2011*). Fundamentos de metodologia científica*. Vozes.

Lima, V. S. de. et al. (2008). *Progressões aritméticas e geométricas: história, conceitos e aplicações*. http://www.objetivomaringa.com.br/colegio_objetivo/site2008/_assets/materiais/94_historiadaspa.pdf.

Lopes, F. H. (2017). *O Ensino de Progressão Geométrica de Segunda Ordem no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP). Repositório Institucional da Instituição. http://hdl.handle.net/11449/151716.

Lopes, L. (1998). *Manual de Progressões*. Interciência.

Lopes, de B. R. (1992). *Manual de Sequencias e Series*. Editora Didática e Cientifica Ltda.

Moraes, F. L. (2023). *Ensino de Progressões Geométricas no Contexto de STEM: Uma Proposta Interdisciplinar*. Educação Matemática em Revista, 28(1), 89-112. https://educacaomatematica.org.br/stem-pg.

Morgado, A. C. O., Wagner, E. & Zani, S. C. (1993). *Progressões e Matemática Financeira*, IMPA/VITAE, 1993, Sociedade Brasileira de Matemática, Estrada Dona Castorina 110, Rio de Janeiro, RJ 22460-320.

Nobre, J. F. F. & Rocha, R. A. (2018). Progressões Aritméticas de Ordem Superior. *Revista Professor de Matemática* on-line. https://www.researchgate.net/publication/328937184_Progressoes_Aritmeticas_de_Ordem_Superior. DOI:10.21711/2319023x2018/pmo63.

Oliveira, F. S. (2011). *O estudo das sequências através de padrões numéricos* [manuscrito] / Fabiana Soares Oliveira. - 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) -Centro de Ciências e Tecnologias.

Pereira A. S. et al. (2018). *Metodologia da pesquisa científica*. [free e-book]. Santa Maria/RS. Ed. UAB/NTE/UFSM.

Silva, A. P. M.; & Souza, T. R. (2022). *Progressões Geométricas: Aplicações em Matemática Financeira*. Revista do Ensino de Matemática, 15(3), 45-59. https://revistadematematica.org.br/pg-aplicacoes.

Silva, L. P. M. (2024). "*Progressão geométrica"*; Brasil Escola. https://brasilescola.uol.com.br/matematica/progressao-geometrica.htm.

Shitsuka, R. et al. (2014). *Matemática fundamental para tecnologia*. (2ed.). Editora Erica.

Stewart, I. (1996). *Os números da natureza*. Rocco.

Vilela, N. S. et al. (2024), *Tecnologias avançadas em ciências exatas: desenvolvimentos recentes e perspectivas futuras - Volume 2* / Organização de Luma Mirely de Souza Brandão, Milson dos Santos Barbosa, Roger Goulart Mello. – Rio de Janeiro: e-Publicar, 2024. P. 115-134.